DECOMPOSITION DE L'ENERGIE PAR NIVEAU DE POTENTIEL

N. BOULEAU

Nous étudions diverses extensions du résultat suivant :

PROPOSITION 1. *Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et soit $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telle que ses dérivées partielles au sens des distributions soient dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors l'image par u de la mesure $\operatorname{grad}^2 u \,.\, m$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$*

Dans une première partie on étudie le cas des fonctions excessives pour un processus de Markov qui s'écrivent comme des semi-martingales continues sur les trajectoires. La propriété résulte alors de la théorie des temps locaux des semi-martingales. On traite ensuite le cas des espaces de Dirichlet et on montre que si $\tilde{u}$ est une version quasi-continue d'une fonction u d'un espace de Dirichlet régulier, l'image par $\tilde{u}$ de la mesure d'énergie locale de u est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Enfin, dans une troisième partie, on démontre la propriété de densité des temps d'occupation pour certains processus de Dirichlet.

I . FONCTIONS EXCESSIVES DES PROCESSUS DE MARKOV

a) Soit $(\Omega, X, \mathbb{P}_\mu)$ un processus droit, d'espace d'état E, de tribus canoniques $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (cf. [10]).

Soit u une fonction excessive finie qui est le potentiel d'une fonctionnelle additive croissante adaptée continue A,

(1) $$u(x) = \mathbb{E}_x A_\infty$$

et s'écrivant sur les trajectoires

(2) $$u(X_t) = u(X_0) + M_t - A_t$$

où la martingale nulle en zéro

$$M_t = \mathbb{E}[A_\infty | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[A_\infty | \mathcal{F}_0]$$

est supposée continue pour simplifier.

On peut associer à u l'<u>énergie-processus</u> EP(u) définie par

(3) $$EP(u)_t = \frac{1}{2} [u^2(X_0) + < M,M >_t],$$

l'<u>énergie-fonction</u> EF(u) donnée par

(4) $$EF(u)(x) = \frac{1}{2} [u^2(x) + \mathbb{E}_x < M,M >_\infty],$$

et si on spécifie une mesure positive θ sur E, l'<u>énergie-nombre</u> $EN_\theta(u)$:

(5) $$EN_\theta(u) = \frac{1}{2} [< \theta, u^2 > + \mathbb{E}_\theta < M,M >_\infty].$$

On a alors

$$EF(u)(x) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_x [u(X_0) + M_\infty]^2 = \frac{1}{2} \mathbb{E}_x A_\infty^2$$

ce qui, par la formule de l'énergie (cf [6]) donne

$$EF(u)(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty u(X_s) dA_s .$$

Ainsi, si on note S^u le noyau excessif associé à u défini par

$$S^u f = \mathbb{E}_. \int_0^\infty f(X_s)\, dA_s$$

on a

(6) $$\underline{EF(u) = S^u u.}$$

b) <u>Représentation de l'énergie comme intégrale de potentiels portés par les lignes de niveau de</u> u.

Notons Y la semi-martingale $u(X_t) = u(X_0) + M_t - A_t$, et soit L_t^a, $a \in \mathbb{R}$, le temps local en a de Y. C'est un processus croissant continu qui vérifie (cf [13]) la formule de Meyer-Tanaka :

(7) $$(u \wedge a)(X_t) = (u \wedge a)(X_0) + \int_0^t 1_{\{u(X_s) < a\}}(dM_s - dA_s) - \frac{1}{2} L_t^a$$

et on a la propriété de densité des temps d'occupation :

(8) $$\int_0^t g(Y_s)\, d < M,M >_s = \int_{\mathbb{R}} g(a)\, L_t^a\, da \qquad \mathbb{P}_x \text{ p.s. } \forall x$$

pour toute fonction g borélienne positive.

Il résulte de (7) que le noyau excessif $S^{u \wedge a}$ associé à la fonction excessive $u \wedge a$ est donné par

$$S^{u \wedge a} f(x) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty f(X_s)\, 1_{\{u(X_s) < a\}} dA_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty f(X_s) dL_s^a\right].$$

Le temps local L_t^a étant porté par $\{(\omega,t) : u(X_t(\omega)) = a\}$, on a en faisant $f = 1_{\{u=a\}}$:

(9) $$S^{u \wedge a}\, 1_{\{u=a\}} = \frac{1}{2} \mathbb{E}_x L_\infty^a$$

d'où par la propriété (8) et (4) :

(10) $$\underline{EF(u) = S^u u = \int_0^\infty (S^{u \wedge a}\, 1_{\{u=a\}}) da + \frac{1}{2} u^2.}$$

Sous l'hypothèse d'existence d'une mesure de référence ξ qu'on choisit excessive et σ-finie, à toute fonctionnelle additive B_t continue on peut associer (cf [15]) une mesure positive σ-finie μ_B qui ne charge pas les semi-polaires donnée par

(11) $$\mu_B(f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_\xi \int_0^t f(X_s) dB_s , \qquad f \text{ mesurable positive.}$$

La mesure μ_u associée par (11) à $< M,M >_t$ sera appelée la <u>mesure d'énergie</u> de u.

De même aux fonctionnelles additives L_t^a correspondent des mesures μ_u^a portées par $\{u=a\}$ qui réalisent une désintégration de μ_u par l'application $x \to u(x)$. On a en effet par (8)

$$\int f o u(x)\, d\mu_u(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int f(x)\, d\mu_u^a(x) \right) da \qquad , \text{ f mesurable positive,}$$

et l'image par u de μ_u restreinte à un ensemble où elle est finie est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

c) Sous les mêmes hypothèses qu'au a), soit φ une fonction concave croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ nulle en zéro, alors $\varphi\, o\, u$ vérifie les mêmes hypothèses que u. D'après la formule de changement de variables pour les temps locaux (cf [3]), on a si $b = \varphi(a)$,

$$L^b(\varphi\, o\, Y) = \varphi_g'(a)\, L^a(Y) \qquad \forall a > 0$$

où φ_g' est la dérivée à gauche de φ. Il résulte alors de (9) et (10) que

$$\begin{aligned} EF(\varphi\, o\, u) &= \frac{1}{2} (\varphi\, o\, u)^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbb{E}.[L_\infty^b(\varphi\, o\, Y)]db \\ &= \frac{1}{2} (\varphi\, o\, u)^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_g'^2(a)\ \mathbb{E}.[L_\infty^a]da, \end{aligned}$$

d'où une formule de changement de variable pour l'énergie

$$(12) \qquad \underline{EF(\varphi\, o\, u) = \frac{1}{2}(\varphi\, o\, u)^2 + \int_0^\infty \varphi'^2(a)\ (S^{u \wedge a}\ 1_{\{u=a\}})da}$$

où on peut prendre une version quelconque de la dérivée de Lebesgue de φ.

Cette formule pourrait être étendue à des hypothèses moins restrictive mais elle s'exprime mieux dans le cadre des espaces de Dirichlet comme nous allons le voir maintenant.

II . CAS DES ESPACES DE DIRICHLET

Nous suivons la présentation de Fukushima [8], avec les notations et hypothèses suivantes :

Sur l'espace l.c.d. E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$, soit m une mesure positive σ-finie de support E. Soit Φ une forme bilinéaire symétrique positive définie sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}\Phi$ de $L^2(E,\mathcal{E},m)$; on suppose que :

. $\mathcal{D}\Phi \cap C_K(E)$ est dense dans $\mathcal{D}\Phi$ pour la norme associée à la forme $\Phi_1(u,v) = \Phi(u,v) + (u,v)$ où $(.,.)$ est le produit scalaire $L^2(m)$ et dense dans $C_K(E)$ pour la topologie naturelle de $C_K(E)$

. Φ est fermée ; i.e. $\mathcal{D}\Phi$ est complet pour la métrique associée à Φ_1,

. la contraction unité opère ; i.e. $u \in \mathcal{D}\Phi$ et $v = (u \vee 0) \wedge 1$ entraînent $v \in \mathcal{D}\Phi$ et $\Phi(v,v) \leqslant \Phi(u,u)$.

Autrement dit Φ est une forme de Dirichlet régulière sur $L^2(m)$, on notera $\mathbb{D} = \mathcal{D}\Phi$ l'espace de Dirichlet associé.

Il existe alors un processus de Hunt $(\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \mathbb{P}_x)$ d'espace d'état $E \cup \{\delta\}$ dont la probabilité de transition P_t est m-symétrique

$$(P_t u,v) = (u,P_t v)$$

pour toutes u,v mesurables positives sur E et qui définit un semi-groupe fortement continu sur $L^2(m)$ tel que :

$$\mathbb{D} = \{u \in L^2(m) : \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(u - P_t u,u) < +\infty\}$$

$$\Phi(u,u) = \lim_{t\downarrow 0} \uparrow \frac{1}{t}(u - P_t u,u) \qquad \forall u \in \mathbb{D}.$$

Si $u \in \mathbb{D}$, $\tilde{u}$ désigne une version quasi-continue de u. Quasi-partout signifie hors d'un m-polaire.

Il existe ([8] lemme 4.5.2.) une mesure positive σ-finie k sur E ne chargeant pas les m-polaires telle que

$$(13) \qquad \forall u \in \mathbb{D} \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m[u^2(X_0)(1_E(X_0) - 1_E(X_t))] = < \tilde{u}^2,k >$$

et on a pour toute $u \in \mathbb{D}$

$$(14) \quad \Phi(u,u) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[(u(X_t) - u(X_0))^2] + \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m[u^2(X_0)(1_E(X_0) - 1_E(X_t))].$$

Rappelons le résultat suivant de Fukushima :

<u>*PROPOSITION 2*</u>. *Soit* $u \in \mathbb{D}$ *, alors il existe un m-polaire* $N(u)$ *tel que,*

pour tout x *hors de* $N(u)$*,*

$$(15) \qquad \tilde{u}(X_t) = \tilde{u}(X_0) + {}^{(u)}M_t + {}^{(u)}A_t$$

à un $\mathbb{P}_x$*-évanescent près, où* ${}^{(u)}M_t$ *est une martingale fonctionnelle additive telle que* $\mathbb{E}_x[{}^{(u)}M_t^2] < \infty$ *pour tout* t *, et où* ${}^{(u)}A_t$ *est une fonctionnelle continue additive d'énergie nulle :*

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[{}^{(u)}A_t^2] = 0$$

et on a

$$(16) \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[(u(X_t)-u(X_0))^2] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[{}^{(u)}M_t^2] = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}[{}^{(u)}M_t^2].$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des processus M qui pour quasi-tout x sont, sous $\mathbb{P}_x$, des martingales fonctionnelles additives de carré intégrable au sens large et tels que

$$e(M) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[M_t^2] < +\infty .$$

$\mathcal{M}$ muni du produit scalaire associé à e est un espace de Hilbert, et par l'inégalité de Doob, le sous-espace de $\mathcal{M}$ des martingales continues est fermé dans $\mathcal{M}$ ([8] théorème 5.2.1.). Nous noterons M^c la projection de M sur ce sous-espace et $M^d = M \ominus M^c$.

La décomposition de $u \in \mathbb{D}$:

$$(17) \qquad \tilde{u}(X_t) = \tilde{u}(X_0) + {}^{(u)}M_t^c + {}^{(u)}M_t^d + {}^{(u)}A_t$$

valable à un $\mathbb{P}_x$-évanescent près pour quasi-tout x sera appelée la <u>décomposition canonique</u> de u.

<u>*LEMME 3*</u>. *Soit* $u \in \mathbb{D}$ *,* f *de classe* C^1 *à support compact et* $F(x) = \int_0^x f(y)dy$.

Alors $F \circ u \in \mathbb{D}$ *et la décomposition canonique de* $F \circ u$ *est*

$$(18) \quad F \circ \tilde{u}(X_t) = F \circ \tilde{u}(X_0) + \int_0^t f \circ \tilde{u}(X_s) d\,{}^{(u)}M_s^c + {}^{(F\circ u)}M_t^d + {}^{(F\circ u)}A_t$$

sous $\mathbb{P}_x$ *pour quasi-tout* x.

Démonstration.

Posons $u_n = nU_{n+1}u = U_1 v_n$ avec $v_n = n(u - nU_{n+1}u)$, où $(U_p)_{p>0}$ est la résolvante de (P_t).

La décomposition canonique de u_n est

$$u_n(X_t) = u_n(X_0) + {}^{(u_n)}M_t^c + {}^{(u_n)}M_t^d + \int_0^t (u_n(X_{s-}) - v_n(X_s))ds$$

valable sous $\mathbb{P}_x$ pour tout x.

De sorte que par la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} F\circ u_n(X_t) &= F\circ u_n(X_0) + \int_0^t f\circ u_n(X_s)d\,{}^{(u_n)}M_s^c + \int_0^t f\circ u_n(X_{s-})d\,{}^{(u_n)}M_s^d \\ &+ \int_0^t f\circ u_n(X_s)(u_n(X_s) - v_n(X_s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t f'\circ u_n(X_s)d\langle {}^{(u_n)}M^c, {}^{(u_n)}M^c\rangle_s \\ &+ \sum_{0<s\leq t} [F\circ u_n(X_s) - F\circ u_n(X_{s-}) - f\circ u_n(X_{s-})(u_n(X_s) - u_n(X_{s-}))]. \end{aligned}$$

La décomposition canonique de $F\circ u_n$ est donc de la forme :

$$(19) \qquad F\circ u_n(X_t) = F\circ u_n(X_0) + \int_0^t f\circ u_n(X_s)d\,{}^{(u_n)}M_s^c + {}^{(F\circ u_n)}M_t^d + {}^{(F\circ u_n)}A_t$$

Lorsque $n\to\infty$, $u_n \to u$ dans $(\mathbb{D},\Phi_1)$, donc $F\circ u_n \to F\circ u$ dans $(\mathbb{D},\Phi_1)$ car $\frac{F}{\|f\|_\infty}$ est une contraction normale donc continue sur $(\mathbb{D},\Phi_1)$ (cf [1]).
Il en résulte ([8] T. 5.2.2.) que :

$${}^{(u_n)}M_t \to {}^{(u)}M_t \quad \text{et} \quad {}^{(F\circ u_n)}M_t \to {}^{(F\circ u)}M_t \quad \text{dans} \quad (\mathcal{M},e)$$

et donc aussi les parties continues et purement discontinues :

$$(20) \qquad {}^{(u_n)}M_t^c \to {}^{(u)}M_t^c \ , \quad {}^{(F\circ u_n)}M_t^c \to {}^{(F\circ u)}M_t^c \ , \quad {}^{(F\circ u_n)}M_t^d \to {}^{(F\circ u_n)}M_t^d$$

dans $(\mathcal{M},e)$.

Prenant une sous-suite telle que $u_m \to \tilde{u}$ quasi-partout, nous déduisons de (20) et du fait que f est continue bornée que

$$\int_0^t f\circ u_m(X_s)d\,{}^{(u_m)}M_s^c \to \int_0^t f\circ\tilde{u}(X_s)d\,{}^{(u)}M_s^c$$

dans $(\mathcal{M},e)$,

on a donc $\qquad {}^{(F\circ u)}M_t^c = \int_0^t f\circ\tilde{u}(X_s)d\,{}^{(u)}M_s^c \quad$ c'est-à-dire (18). □

Le processus X_t étant de Hunt, il existe une fonctionnelle additive croissante continue ξ_s canonique. Soit $(N(x,dy),\xi_s)$ le système de Lévy associé qui, rappelons-le, est tel que si $h(x,y)$ est mesurable positive sur $E \times E$ nulle sur la diagonale, la projection prévisible de la mesure aléatoire

$$\sum_{s>0} h(X_s,X_{s-})\ \varepsilon_s$$

est la mesure

$$\left[\int h(y,X_s)\ N(X_s,dy)\right] d\xi_s .$$

On a alors :

<u>COROLLAIRE 4</u>. *Soit $u \in \mathbb{D}$, f de classe C^1 à support compact, et* $F(x) = \int_0^x f(y)dy$. *On a*

$$(21) \qquad <{}^{(F\circ u)}M,{}^{(F\circ u)}M>_t = \int_0^t f^2 \circ \tilde{u}(X_s)\ d<{}^{(u)}M^c,{}^{(u)}M^c>_s$$
$$+ \int_0^t \int (F\circ\tilde{u}(y) - F\circ\tilde{u}(X_s))^2\ N(X_s,dy)\ d\xi_s$$

sous $\mathbb{P}_x$ *pour quasi-tout* x.

<u>Démonstration</u>.

Il résulte de la relation (18) que

$$\Delta^{(F\circ u)}M^d_t = F\circ\tilde{u}(X_t) - F\circ\tilde{u}(X_{t-}) .$$

Le processus $<{}^{(F\circ u)}M^d,{}^{(F\circ u)}M^d>_t$, projection prévisible duale de $\sum_{0<s\leq t} (\Delta^{(F\circ u)}M^d_t)^2$ est donc égal à

$$\int_0^t \int (F\circ\tilde{u}(y) - F\circ\tilde{u}(X_s))^2\ N(X_s,dy)\ d\xi_s$$

d'où le corollaire. $\square$

Soit $u \in \mathbb{D}$, notons μ_u la <u>mesure d'énergie locale</u> de u définie par

$$<\mu_u,h> = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t}\ \mathbb{E}_m \int_0^t h(X_s)\ d<{}^{(u)}M^c,{}^{(u)}M^c>_s$$

pour toute h $\mathcal{E}$-mesurable positive.

La mesure μ_u ne charge pas les m-polaires et on a

$$\|\mu_u\| \leqq \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[{}^{(u)}M_t^2] \leqq \Phi(u,u) < +\infty$$

on peut donc aussi définir la mesure ν_u image de μ_u par $\tilde{u}$, on a d'après (18)

$$(22) \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[({}^{(F\circ u)}M_t^c)^2] = \langle \mu_u, f^2\circ\tilde{u} \rangle = \int f^2(y)d\nu_u(y).$$

Soit alors g borélienne bornée et $G(x) = \int_0^x g(y)dy$, et soient g_n de classe C^1 à support compact $|g_n| \leqq \|g\|_\infty$ telles que $g_n \to g$ dans $L^2(\nu_u + \frac{dx}{1+x^2})$.

a) D'abord $g_n \to g$ dans L^1_{loc} donc $G_n = \int_0^{\cdot} g_n(y)dy \to G$ partout, donc comme $|G_n(y)| < \|g\|_\infty \; |y|$, on a

$$(23) \qquad G_n\circ u \to G\circ u \qquad \text{dans} \qquad L^2(m).$$

b) Montrons que $G_n\circ u$ est une suite de Cauchy pour Φ. Pour cela écrivons d'après (13),(14) et (16)

$$\Phi(G_p\circ u - G_q\circ u\,,\, G_p\circ u - G_q\circ u) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m[{}^{(G_p\circ u - G_q\circ u)}M_t^2]$$

$$+ \langle (G_p\circ\tilde{u} - G_q\circ\tilde{u})^2, k \rangle$$

. Comme $|G_p\circ\tilde{u} - G_q\circ\tilde{u}| \leqq 2\,\|g\|_\infty\, \tilde{u}^2$ et $\langle \tilde{u}^2, k \rangle \leqq \Phi(u,u) < +\infty$ et que $G_p - G_q \to 0$, on a $\langle (G_p\circ\tilde{u} - G_q\circ\tilde{u})^2, k \rangle \to 0$ pour $p,q \uparrow \infty$.

. Soit η la mesure positive σ-finie ne chargeant pas les m-polaires associée à la fonctionnelle additive canonique ξ_t ; on a

$$\langle \eta, h \rangle = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m \int_0^t h(X_s)d\xi_s \;, \qquad h \text{ mesurable positive.}$$

Il résulte du corollaire 4 que :

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{2t} E_m[{}^{(G_p\circ u - G_q\circ u)}M_t^2] = \langle (g_p - g_q)^2\circ\tilde{u}, \mu_u \rangle$$

$$+ \frac{1}{2} \left\langle \int [(G_p - G_q)\circ\tilde{u}(y) - (G_p - G_q)\circ\tilde{u}(x)]^2 N(x,dy), \eta(dx) \right\rangle$$

Le premier terme qui vaut $< (g_p - g_q)^2, \nu_u >$ tend vers zéro parce que $g_p \to g$ dans $L^2(\nu_u)$.

Dans le second nous avons :

$$|(G_p - G_q) \circ \tilde{u}(y) - (G_p - G_q) \circ \tilde{u}(x)| \leq 2 \|g\|_\infty \, |\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)|$$

Or

$$\iint (\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x))^2 N(x,dy)\eta(dx) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m \int_0^t (\tilde{u}(y) - \tilde{u}(X_s))^2 N(X_s, dy) d\xi_s$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m [\sum_{0<s\leq t} (u(X_s) - u(X_{s-}))^2] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m [\sum_{0<s\leq t} (\Delta {}^{(u)}M_s)^2]$$

$$\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_m [{}^{(u)}M_t^2] \leq \Phi(u,u) < +\infty .$$

Donc le théorème de convergence dominée s'applique, ce qui montre que $G_n \circ u$ est une suite de Cauchy pour Φ .

c) Il résulte du a) et du b), la forme Φ étant fermée, que $G_n \circ u \to G \circ u$ dans $(\mathbb{D}, \Phi_1)$.

Ceci entraîne, comme dans la démonstration du lemme 3, que

$$(G_n \circ u)_{M_t^c} \to (G \circ u)_{M_t^c} \quad \text{dans } (\mathcal{M}, e).$$

Comme le fait que g_n tende vers g dans $L^2(\nu_u)$ entraîne que

$$\int_0^t g_n \circ \tilde{u}(X_s) d{}^{(u)}M_d^c \to \int_0^t g \circ \tilde{u}(X_s) d{}^{(u)}M_s^c \quad \text{dans } (\mathcal{M}, e)$$

il en résulte que la décomposition canonique de $G \circ u$ est

$$G \circ \tilde{u}(X_t) = G \circ \tilde{u}(X_0) + \int_0^t g \circ \tilde{u}(X_s) d{}^{(u)}M_s^c + {}^{(G \circ u)}M_t^d + {}^{(G \circ u)}A_t ,$$

donc

$$\Phi(G \circ u, G \circ u) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} \mathbb{E}_m [{}^{(G \circ u)}M_t^2] + < G^2 \circ \tilde{u}, k >$$

$$= < g^2, \nu_u > + \iint (G \circ \tilde{u}(y) - G \circ \tilde{u}(x))^2 N(x,dy)\eta(dx) + < G^2 \circ \tilde{u}, k > .$$

On a donc démontré :

<u>*THEOREME 5*</u>. *Soit* g *borélienne bornée et* $G(x) = \int_0^x g(y)\,dy$ *alors pour toute* $u \in \mathbb{D}$, $G \circ u \in \mathbb{D}$ *et on a*

$$(24)\quad \Phi(Gou,Gou) = \langle g^2, \nu_u \rangle + \iint (Go\tilde{u}(y) - Go\tilde{u}(x))^2 N(x,dy)\,\eta(dx) + \langle G^2o\tilde{u}, k \rangle$$

et la décomposition canonique de Gou *est*

$$(25)\quad Go\tilde{u}(X_t) = Go\tilde{u}(X_0) + \int_0^t go\tilde{u}(X_s)\,d^{(u)}M_s^c + {}^{(Gou)}M_t^d + {}^{(Gou)}A_t$$

sous $\mathbb{P}_x$ *pour quasi-tout* x.

Ce qui, dans le cas d'une fonction d'une seule variable, étend une formule de LE JAN [11].

<u>*COROLLAIRE 6*</u>. *La mesure* ν_u, *image par* $\tilde{u} \in \mathbb{D}$ *de la mesure d'énergie locale* μ_u, *est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

<u>Démonstration</u>.

Il suffit de prendre pour g l'indicatrice d'un négligeable Lebesgue dans la relation (24).

<u>Remarque 7</u> : Si le processus X_t est de type Lebesgue (i.e. si la fonctionnelle additive identique à t est canonique) pour toute $u \in \mathbb{D}$ on a $d \langle {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c \rangle_t \ll dt$ donc $\mu_u \ll m$, donc le corollaire 6 est valable avec u au lieu de $\tilde{u}$.

C'est le cas en particulier pour le brownien sur $\mathbb{R}^d$, ce qui établit la proposition 1 énoncée dans l'introduction. Celle-ci peut d'ailleurs se démontrer directement en se ramenant à la dimension 1 grâce au lemme 3.2. de [7] et en établissant que si u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à variation finie continue, l'image réciproque par u d'un négligeable Lebesgue est négligeable pour la mesure $|du|$, propriété au demeurant non triviale.

III . PROPRIETES DE DENSITE DE TEMPS D'OCCUPATION

A . Restons d'abord dans le cadre des espaces de Dirichlet.

DEFINITION 8. *Nous dirons que $u \in \mathbb{D}$ vérifie quasi-partout la propriété de densité de temps d'occupation sur les trajectoires si la décomposition canonique de u étant*

$$\tilde{u}(X_t) = \tilde{u}(X_0) + {}^{(u)}M_t^c + {}^{(u)}M_t^d + {}^{(u)}A_t \qquad \mathbb{P}_x \text{ ps} \qquad \forall x \notin N(u)$$

l'image de la mesure $d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s (\omega)$ sur $[0,t]$ par l'application $s \to \tilde{u}(X_s(\omega))$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathbb{P}_x$ ps pour quasi-tout x.

Plaçons nous dans le cas où m est une mesure de référence, ce qui est équivalent à dire que les m-polaires sont polaires (cf [8] T.4.2.2.). On est alors sous les hypothèses de dualité classiques [2]. Pour $\alpha > 0$ soit $u_\alpha(x,y)$ la fonction symétrique α-excessive en chaque variable telle que

$$U_\alpha f(x) = \int u_\alpha(x,y)\, f(y)\, dm(y) \qquad f \in \mathcal{E}^+.$$

A une mesure μ dont le potentiel est borné correspond une fonctionnelle additive A_t telle que

$$U_\alpha(h.\mu)(x) = \int u_\alpha(x,y)\, h(y)\, d\mu(y) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\alpha s}\, h(X_s)\, dA_s.$$

On en déduit (cf [14] p765) que si μ est une mesure positive σ-finie ne chargeant pas les polaires, il lui correspond une mesure aléatoire positive homogène $dA_t(\omega)$ telle que

$$(26) \qquad U_\alpha(h.\mu)(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\infty e^{-\alpha s}\, h(X_s)\, dA_s \qquad \forall h \in \mathcal{E}^+$$

donc vérifiant

$$(27) \quad < h.\mu, U_\alpha g > = \mathbb{E}_{g.m} \int_0^\infty e^{-\alpha s}\, h(X_s)\, dA_s \qquad h,g \in \mathcal{E}^+.$$

Soit alors $u \in \mathbb{D}$ et $\tilde{u}$ une version borélienne quasi-continue de u. Si nous désintégrons la mesure d'énergie locale μ_u par l'application $x \to \tilde{u}(x)$, nous obtenons des mesures μ_u^a telles que :

(28) $\qquad \mu_u^a$ est portée par $\{\tilde{u}=a\}$ et $\int \mu_u^a \, da = \mu_u$.

Faisons l'hypothèse suivante :

(29) <u>Pour Lebesgue presque tout</u> a <u>les mesures</u> μ_u^a <u>ne chargent pas les polaires</u>. Cette hypothèse ne dépend pas de la version $\tilde{u}$ puisque μ_u ne charge pas les polaires.

Alors aux mesures μ_u^a correspondent des mesures aléatoires positives homogènes dA_t^a telles que :

$$(30) \qquad < h.\mu_u^a, U_\alpha g > = \mathbb{E}_{g.m} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \, h(X_s) \, dA_s^a \qquad h,g \in \mathcal{E}^+, \ \alpha > 0.$$

A la mesure μ_u correspond une mesure aléatoire homogène qui d'après la définition de μ_u prolonge la mesure $d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s$ qui n'était jusqu'à présent définie que $\mathbb{P}_s$ ps pour quasi-tout x. Nous notons encore $d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s$ cette mesure.

On a donc, si f est positive :

$$\mathbb{E}_{g.m} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \, h(X_s) \, f \circ \tilde{u}(X_s) \, d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s$$

$$= < h \, . \, f \circ \tilde{u} \, . \, \mu_u, U_\alpha g >$$

ce qui vaut d'après (28) puis (30)

$$= \int f(a) < h \, . \, \mu_u^a, U_\alpha g > da$$

$$= \mathbb{E}_{g.m} \int_0^\infty \int_{a \in \mathbb{R}} e^{-\alpha s} \, h(X_s) \, f(a) \, dA_s^a \, da.$$

Il en résulte que les fonctions α-excessives

$$\mathbb{E}. \int_0^\infty e^{-\alpha s} \, h(X_s) \, f \circ \tilde{u}(X_s) \, d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s \quad \text{et}$$

$$\mathbb{E}. \int_0^\infty \int_{a \in \mathbb{R}} e^{-\alpha s} \, h(X_s) \, f(a) \, dA_s^a \, da \, , \quad \text{égales m-presque partout,}$$

coïncident. Donc aussi les mesures aléatoires

$$f \circ \tilde{u}(X_s) \, d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s d\,\mathbb{P}_x \quad \text{et} \quad \int_{a \in \mathbb{R}} f(a) \, dA_s^a \, da \, d\,\mathbb{P}_x,$$

pour tout x.

Prenant alors x hors d'un polaire $N(u)$ de sorte que

$$< {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_t \quad < +\infty \qquad \mathbb{P}_x \text{ ps} \quad \forall x \notin N(u),$$

et faisant parcourir à f un ensemble dénombrable dense dans C_K, on voit que u vérifie quasi-partout la propriété de densité de temps d'occupation sur les trajectoires.

Remarque 9 : Si m est de référence et si le seul polaire est l'ensemble vide alors la condition (29) est trivialement vérifiée. C'est le cas notamment pour le brownien sur $\mathbb{R}$: pour toute $u \in \mathbb{D} = H^1(\mathbb{R})$ on a

$$u(B_t) = u(B_0) + \int_0^t u'(B_s)dB_s + {}^{(u)}A_t \qquad \mathbb{P}_x \text{ ps} \quad \forall x \quad \text{et}$$

$$d < {}^{(u)}M^c, {}^{(u)}M^c >_s = u'^2(B_s)ds.$$

Alors

$$(31) \quad \varphi \to \int_0^t \varphi \circ u(B_s)\, u'^2(B_s)ds$$

définit une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce qui peut se voir aussi en notant que si L_t^a est le temps local du brownien B_t en a, on a

$$\int_0^t \varphi \circ u(B_s)\, u'^2(B_s)ds = \int_{\mathbb{R}} \varphi \circ u(a)\, u'^2(a)\, L_t^a\, da$$

et en appliquant la propriété de l'introduction à la fonction u.

Au demeurant, le processus $Y_t = \tilde{u}(B_t)$ n'est pas une semi-martingale en général, le processus ${}^{(u)}A_t$ n'étant pas à variation finie si u n'est pas différence de convexes (cf [5]). Ceci étend donc la propriété de densité de temps d'occupation à des cas nouveaux par rapport à [9].

Remarque 10 : Pour un espace de Dirichlet général sous les hypothèses de la partie II, on voit que l'ensemble des $u \in \mathbb{D}$ qui vérifient la propriété de densité de temps d'occupation sur les trajectoires est stable par composition avec les fonctions lipschitziennes d'une variable, et contient évidemment les fonctions $u \in \mathbb{D}$ qui s'écrivent suivant des semi-martingales sur les trajectoires, ensemble qui contient les différences de p-excessives qui sont dans $L^2(m)$, (cf [5]).

Dans le cas du brownien à valeurs $\mathbb{R}^d$, soit $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de décomposition canonique :

$$\tilde{f}(B_t) = \tilde{f}(B_0) + \int_0^t (\text{grad}.f(B_s),dB_s) + {}^{(f)}A_t$$

sous $\mathbb{P}_x$ pour x hors d'un polaire.

Soit ρ une mesure à support compact ne chargeant pas les polaires, d'après [4] pour tout x, pour $\mathbb{P}_x$ presque tout ω la mesure

$$\zeta = \int_0^t \varepsilon_{B_s(\omega)} * \rho \; ds$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Il en résulte par la propriété de l'introduction que l'image par f de la mesure $\text{grad}^2 f \,.\, \zeta$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous obtenons ainsi le résultat suivant :

<u>*PROPOSITION 11*</u>. *Soit g une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ de la forme*

$$g = f * \rho$$

où $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et où ρ est une mesure à support compact ne chargeant pas les polaires, donc $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Alors g vérifie quasi-partout la propriété de densité de temps d'occupation sur les trajectoires du brownien d-dimensionnel.

B . Nous abandonnons maintenant le cadre markovien et nous considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant les conditions habituelles. Nous allons étudier la propriété de densité de temps d'occupation pour des processus de Dirichlet c'est-à-dire des processus de la forme :

$$Y_t = Y_0 + M_t + A_t$$

où M_t est une martingale locale nulle en zéro et A_t un processus nul en zéro de variation quadratique nulle en un sens à préciser. C'est-à-dire la question de l'absolue continuité de l'image par $s \to Y_s(\omega)$ de la mesure $d < M^c, M^c >_s$ sur $[0,t]$ pour $\mathbb{P}$-presque tout ω.

Quoique plusieurs définitions soient possibles pour les processus de variation quadratique nulle, remarquons que fondamentalement la question posée ne dépend pas d'un changement absolument continu de probabilité ni d'un arrêt, ni d'un changement de temps.

On peut ainsi à partir de la propriété démontrée pour le brownien linéaire à la remarque 9, obtenir la propriété de densité de temps d'occupation pour les processus de la forme $u(X_t)$ où $u \in H^1(\mathbb{R})$ et où X_t est une semi-martingale qui se ramène à un brownien arrêté par changement de temps et changement absolument continu de probabilité.

Cette remarque justifie le fait que nous considérerons une semi-martingale continue de décomposition :

$$(32) \qquad X_t = X_0 + N_t + B_t$$

qui ne vérifie pas nécessairement $|dB_s| << d < N,N >_s$ mais que nous prendrons dans l'espace H^2 de semi-martingales sur $[0,1]$:

$$(33) \qquad \| X \|_{H^2} = \| \, |X_0| + < N,N >_1^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 |dB_s| \, \|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} < \infty$$

Et nous adopterons les définitions suivantes :

<u>*DEFINITION 12.*</u> *Un processus Y_t, $t \in [0,1]$ sera appelé <u>processus de Dirichlet</u> s'il peut s'écrire*

$$Y_t = Y_0 + M_t + A_t$$

où M_t est une martingale telle que $\mathbb{E}\, M_1^2 < \infty$ nulle en zéro, et A_t un processus nul en zéro tel que

$$\mathbb{E} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(A_{\frac{k+1}{2^n}} - A_{\frac{k}{2^n}}\right)^2 \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0.$$

La décomposition de Y est alors unique.

DEFINITION 13. *On dira que Y vérifie la propriété D.T.O. si $\mathbb{P}$ p.s. l'image de $d < M^c, M^c >_s$ sur $[0,1]$ par $s \to Y_s$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.*

A la semi-martingale X vérifiant (32) (33) nous associons la semi-norme N^X définie par

$$[N^X(f)]^2 = \limsup_{t\uparrow\infty} \mathbb{E} \sum_{k=0}^{2^n-1} [f(X_{\frac{k+1}{2^n}}) - f(X_{\frac{k}{2^n}})]^2$$

Nous appelerons alors espace opératoire associé à la semi-martingale X l'espace $\mathbb{D}(X)$ des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel qu'il existe des fonctions f_n indéfiniment dérivables à support compact $(f_n \in \mathcal{D})$ telles que :

$$N^X(f - f_n) + \| f - f_n \|_{L^2} \underset{n\uparrow\infty}{\to} 0.$$

Cette dénomination est justifiée par la proposition suivante :

PROPOSITION 14. *a) Pour toute fonction borélienne $f \in \mathbb{D}(X)$, le processus $f(X_t)$ est un processus de Dirichlet dont la partie martingale s'écrit $\int_0^t f^*(X_s)dN_s$ pour une fonction f^* vérifiant*

$$[N^X(f)]^2 = \int_{\mathbb{R}} f^{*2}(a) \ \mathbb{E}\, L_1^a \, da$$

où L_t^a est le temps local de la semi-martingale X en a. Le processus de Dirichlet $f(X_t)$ vérifie la propriété D.T.O.

b) $\mathbb{D}(X)$ contient les fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ de classe C^1 à dérivée tendant vers zéro à l'infini.

c) Si $\int_\alpha^\beta \frac{da}{\mathbb{E} L_1^a} < +\infty$, toute fonction $f \in \mathbb{D}(X)$ est égale presque partout sur $]\alpha,\beta[$ à une fonction absolument continue dont la dérivée est égale à f^* presque partout sur $]\alpha,\beta[$.

d) Si $\mathbb{E} L_1^a \geq \lambda > 0$ sur $]\alpha,\beta[$ toute fonction $f \in \mathbb{D}(X)$ a sa restriction à $]\alpha,\beta[$ dans $H^1(]\alpha,\beta[)$.

Démonstration.

1) Soit f borélienne $f \in \mathbb{D}(X)$ et soient $f_n \in \mathcal{D}$ telles que $N^X(f - f_n) + \|f - f_n\|_{L^2} \to 0$.

Comme la semi-martingale $(f_n - f_m)(X)$ est dans l'espace H^2 de semi-martingales on a (cf [12]) :

$$N^X(f_n - f_m) = \limsup_{p\uparrow\infty} \mathbb{E} \sum_{k=0}^{2^p-1} [(f_n - f_m)(X_{\frac{k+1}{2^p}}) - (f_n - f_m)(X_{\frac{k}{2^p}})]^2$$

$$= \mathbb{E} \int_0^1 (f'_n - f'_m)^2(X_s)\, d < N,N >_s$$

$$= \int_0^1 (f'_n - f'_m)^2(a)\, \mathbb{E}\, L_1^a\, da.$$

Soit f^* une version borélienne de la limite de f'_n dans l'espace $L^2((\mathbb{E} L_1^a)\, da)$. Si nous écrivons

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t f'_n(X_s)\, dN_s + A_t^n ,$$

les intégrales stochastiques $\int_0^t f'_n(X_s)\, dN_s$ convergent vers $\int_0^t f^*(X_s)\, dN_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si alors nous définissons A_t par la formule :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f^*(X_s)\, dN_s + A_t$$

nous avons en posant :

$$V_p(Z) = \sum_{k=0}^{2^p-1} (Z_{\frac{k+1}{2^p}} - Z_{\frac{k}{2^p}})^2 \quad \text{pour un processus } Z ,$$

$$V_p(A) \leq 3V_p[(f - f_n)(X)] + 3V_p[\int_0^\cdot (f'_n - f^*)(X_s)\, dN_s]$$

$$+ 3\, V_p(B^n).$$

D'où

$$\limsup_{p\uparrow\infty} \mathbb{E}[V_p(A)] \leq 3[N^X(f - f_n)]^2 + 3\, \|f'_n - f^*\|^2_{L^2(\mathbb{E} L_1^a\, da)}$$

Le second membre peut être rendu aussi petit qu'on veut pour n suffisamment grand ce qui montre que $f(X_t)$ est un processus de Dirichlet de partie martingale $\int_0^t f^*(X_s)\, dN_s$.

Il en résulte également que

$$[N^X(f)]^2 = \mathbb{E}\int_0^1 f^{*2}(X_s)\, dN_s = \int_0^1 f^{*2}(a)\, \mathbb{E}\, L_1^a\, da$$

et la fonction f^* est unique à l'égalité $\mathbb{E}\, L_1^a\, da$ - presque sure près.

2) Pour démontrer la propriété D.T.O. pour $f(X)$ nous procèderons de la façon suivante :

Considérons la forme bilinéaire symétrique Φ_ω définie par

$$\Phi_\omega(u,v) = \int_{\mathbb{R}} u'(a)\, v'(a)\, L_1^a(\omega)\, da \qquad u,v \in \mathcal{D}$$

ainsi que, en posant $\nu = (\mathbb{E}\, L_1^a)da$, la forme Φ_ν définie par

$$\Phi_\nu(u,v) = \int_{\mathbb{R}} u'(a)\, v'(a)\, \nu(da) \qquad u,v \in \mathcal{D}.$$

Il résulte du fait que L_1^a est càdlàg $\mathbb{P}$.ps. que les formes Φ_ω sont fermables dans $L^2(\mathbb{R})$ (cf [8]). D'où l'on déduit que Φ_ν est fermable dans $L^2(\mathbb{R})$ (cf [8] p45). Notons $\overline{\Phi}_\omega$ et $\overline{\Phi}_\nu$ les formes de Dirichlet associées, ce sont des formes régulières, locales, conservatives.

Soient $u \in \mathcal{D}_{\overline{\Phi}_\nu}$ et $u_n \in \mathcal{D}$ telles que

$$\overline{\Phi}_\nu(u-u_n, u-u_n) + \|u-u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \xrightarrow[n\uparrow\infty]{} 0,$$

alors u_n' est une suite de Cauchy dans $L^2(\nu)$, converge donc vers $u^* \in L^2(\nu)$, et $\overline{\Phi}_\nu(u,u) = \int u^{*2}(a)\, d\nu(a)$.

Dans ces conditions, d'après les lemmes 15 et 16 ci-dessous pour $\mathbb{P}$-presque tout ω on a $u \in \mathcal{D}_{\overline{\Phi}_\omega}$ et la mesure d'énergie locale de u dans $(\mathcal{D}_{\overline{\Phi}_\omega}, \overline{\Phi}_\omega)$ est

$$h \longrightarrow \int h(a)\, u^{*2}(a)\, L_t^2(\omega)\, da.$$

Il résulte alors de la partie II (corollaire 6) que la mesure

$$\varphi \to \int \varphi \circ u(a)\, u^{*2}(a)\, L_t^a(\omega)\, da$$

est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue . Maintenant il résulte du 1) que $\mathbb{D}(X) \subset \mathcal{D}\overline{\Phi}_\nu$ et que $[N^X(f)]^2$ coïncide avec $\overline{\Phi}_\nu(f)$ pour $f \in \mathbb{D}(X)$ d'où la propriété D.T.O. annoncée.

3) Pour montrer le b), soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ de classe C^1 à dérivée dans C_0. On peut alors approcher f par des $f_n \in \mathcal{D}$ dans L^2 de sorte que les f_n' approchent f' uniformément. On a alors

$$V_p[(f - f_n)(X)] \leq \|f' - f_n'\|_\infty^2\, V_p(X)$$

de sorte que

$$N^X(f - f_n) \leq \|f' - f_n'\|_\infty \quad \|X\|_{H^2}$$

d'où le résultat.

4) Sous l'hypothèse du c) soient $x,y \in]\alpha,\beta[$ on a avec les notations du 1) ci-dessus :

$$\left|\int_x^y f^*(z)\,dz - f_n(y) + f_n(x)\right|^2 \leq \int_x^y \frac{da}{\mathbb{E}L_1^a} \int_x^y (f^*(a) - f_n'(a))^2\, \mathbb{E}L_1^a\, da$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \frac{da}{\mathbb{E}L_1^a}\, \|f^* - f_n'\|^2_{L^2(\nu)}$$

le résultat en découle aisément.

5) Sous l'hypothèse du d) on a :

$$\lambda \int_\alpha^\beta u'^2(a)\,da \leq \int_{\mathbb{R}} u'^2(a)\, \mathbb{E}L_1^a\, da \qquad \forall u \in \mathcal{D}$$

on a donc en restriction à $]\alpha,\beta[$

$$\mathbb{D}(X) \subset \mathcal{D}(\overline{\Phi}_\nu) \subset H^1(]\alpha,\beta[).$$

Il nous reste deux lemmes à établir.

LEMME 15. *Soient $\bar\Phi_\omega$ et $\bar\Phi_\nu$ les formes de Dirichlet régulières définies par*

$$\bar\Phi_\omega(v,w) = \int v'(a)\, w'(a)\, L_1^a(\omega)\, da \qquad v,w \in \mathcal{D}$$

$$\bar\Phi_\nu(v,w) = \int v'(a)\, w'(a)\, \mathbb{E} L_1^a\, da \qquad v,w \in \mathcal{D}$$

alors si $u \in \mathcal{D}\bar\Phi_\nu$, pour presque tout ω $u \in \mathcal{D}\bar\Phi_\omega$.

Démonstration.

Si $u \in \mathcal{D}\bar\Phi_\nu$, il existe $u_n \in \mathcal{D}$ $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\Phi_\nu(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0$ quand $m,n \uparrow \infty$.

Soit n_i une sous-suite telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\Phi_\nu(u_{n_{i+1}} - u_{n_i},\, u_{n_{i+1}} - u_{n_i})} < +\infty$$

alors pour $\mathbb{P}$-presque tout ω on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\Phi_\omega(u_{n_{i+1}} - u_{n_i},\, u_{n_{i+1}} - u_{n_i})} < +\infty$$

donc

$$\Phi_\omega(u_{n_i} - u_{n_j},\, u_{n_i} - u_{n_j}) \to 0 \quad \text{quand } n_i, n_j \uparrow \infty \quad \text{et donc}$$

$u \in \mathcal{D}\bar\Phi_\omega$.

LEMME 16. *Sous les mêmes hypothèses soient $u \in \mathcal{D}\bar\Phi_\nu$, $u_n \in \mathcal{D}$ convergant vers u dans L^2 et pour $\bar\Phi_\nu$.*
Soit u^* la limite des u'_n dans $L^2(\nu)$, alors pour presque tout ω, la mesure d'énergie locale de u dans $\mathcal{D}\bar\Phi_\omega$ est $h \to \int h(a)\, u^{*2}(a)\, L_1^a(\omega)\, da$.

Démonstration.

Il résulte du raisonnement de la démonstration précédente que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $u^* \in L^2(L_1^a(\omega)\, da)$ et $u'_{n_i} \to u^*$ dans $L^2(L_1^a(\omega)\, da)$.

Alors comme la mesure d'énergie locale $\mu_{u_{n_i}}$ des u_{n_i} dans $(\mathcal{D}\bar\Phi_\omega, \bar\Phi_\omega)$ est donnée par

$$< \mu_{u_{n_i}}, h > = \int h(a)\, u'^2_{n_i}(a)\, L_1^a(\omega)\, da,$$

on déduit du fait que pour toute h borélienne positive bornée l'application $u \to \langle \mu_u, h \rangle$ est continue sur $(\mathcal{D}\overline{\Phi}_\omega, \overline{\Phi}_\omega + \|\cdot\|_{L^2})$ (cf [11]) le résultat annoncé.

<u>Remarque 17</u> : <u>Si</u> $f \in \mathbb{D}(X)$ <u>et si</u> f <u>est absolument continue de dérivée</u> f' <u>au sens des distributions, on a toujours</u> $f^* = f'$ $(\mathbb{E}\, L_1^a)\, da$ -p.p.

(De sorte que, dans ce cas, la propriété D.T.O. pour $f(X)$ résulte immédiatement de la propriété de l'introduction et de la propriété D.T.O. pour X).

En effet, soit $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $N^X(f - f_n) \to 0$ et $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$. Alors $f_n' \to f^*$ dans $L^2(\mathbb{E}\, L_1^a\, da)$ et $f_n' \to f'$ au sens de $\mathcal{D}'$. Il existe alors une sous-suite n_i telle que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $f_{n_i}' \to f^*$ dans $L^2(L_1^a(\omega)\, da)$, mais la fonction $a \to L_1^a(\omega)$ étant càdlàg l'ensemble $\{L_1^a(\omega) > 0\}$ ne diffère de son intérieur que par un ensemble dénombrable.

Et sur cet intérieur on a nécessairement $f^* = f'$ Lebesgue p.s.
on a donc $f^* = f'$ $L_1^a(\omega)\, da$ - p.p. donc $\mathbb{E}\, L_1^a\, da$ p.p.

<u>Remarque 18</u> : <u>Soit</u> $f \in H^1(\mathbb{R})$ <u>telle que</u> $f(X)$ <u>soit un processus de Dirichlet alors ce processus de Dirichlet a pour partie martingale</u> $\int_0^{\cdot} f'(X_s)\, dN_s$ <u>si et seulement si</u> $f \in \mathbb{D}(X)$.

En effet, si $f \in \mathbb{D}(X)$ le résultat vient de la remarque précédente.

D'autre part, soit $f \in H^1(\mathbb{R})$ telle que $f(X)$ soit un processus de Dirichlet de partie martingale $\int_0^{\cdot} f'(X_s)\, dN_s$.

Notons d'abord que cette martingale est bien définie car de

$$(X_1 - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^1 1_{\{X_{s-} > a\}}\, dX_s + \frac{1}{2} L_1^a$$

on tire

$$\sup_a \mathbb{E}\, L_1^a \leqq 2\mathbb{E}\, |X_1 - X_0| + 2\,\mathbb{E} \int_0^1 |dB_s| \leqq C\, \|X\|$$

et donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t f'(X_s)\, dN_s\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} f'^2(a)\, \mathbb{E}\, L_t^a\, da \leqq C\, \|X\|\, \|f'\|_{L^2}^2 .$$

De plus si $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sont telles que $\|f - f_n\|_{L^2} + \|f' - f_n'\|_{L^2} \to 0$

on a :

$$[N^X(f - f_n)]^2 = \int_{\mathbb{R}} (f' - f_n')^2(a)\, \mathbb{E}\, L_1^a\, da \leqq C\, \|X\|\, \|f' - f_n'\|^2_{L^2}$$

d'où il résulte que $f \in \mathbb{D}(X)$.

Nicolas BOULEAU

E.N.P.C. - C.E.R.M.A.

28, rue des Saints-Pères
75007 PARIS.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANCONA : Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet
Sém. th. du potentiel n°2
Lect. Notes in math. n°563,
Springer (1976).

[2] R.M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR :
Markov processes and potential theory
Acad. Press (1968)

[3] N. BOULEAU : Propriétés d'invariance du générateur étendu d'un processus de Markov
Sém. Prob. XV
Lect. Notes in Math. 850, Springer (1981).

[4] N. BOULEAU : Semi-martingales à valeurs $\mathbb{R}^d$ et fonctions convexes
C.R.Acad.Sc. Paris t292 pp87-90, (1981).

[5] E. CINLAR, J. JACOD, P. PROTTER, M.J. SHARPE :
Semi-martinales and Markov processes
Z.f. Wahrscheinlichkeitsth, 54, 161-219, (1980).

[6] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER :
Probabilités et potentiel, théorie des martingales
Hermann, Paris, (1980).

[7] J. DENY, J.L. LIONS :
Les espaces de type BEPPO-LEVY
Ann. Inst. Fourier 5, 305-370, (1953/54).

[8] M. FUKUSHIMA : Dirichlet forms and Markov processes
North Holland (1980).

[9] D. GEMAN, J. HOROWITZ :
Occupation densities
Ann. of Probability, vol. 8 N°1, 1-67, (1980).